Chapitre

3 Nombre dérivé. Fonction dérivée

Objectifs

Le chapitre 3 est crucial dans la formation des élèves en analyse. Même si la notion de fonction a été explicitée en seconde, les élèves ont toujours des difficultés à appréhender l'objet f et en particulier à distinguer f et $f(x)$. Le travail fait en première S sur la dérivation puis en terminale S sur l'intégration et les équations différentielles concerne cet objet fonction et doit permettre aux élèves de s'en faire petit à petit une meilleure idée.

La notion de limite finie en un point de $\mathbb{R}$ est, conformément au programme, intuitive, tout comme les opérations élémentaires sur ces limites. Dans les démonstrations, on aura le souci de distinguer clairement ce qui est démontré de ce qui est admis intuitivement. En particulier si u est une fonction dérivable en a, la continuité de u en a permettant d'affirmer que $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ quand h tend vers 0 est admise. On peut en fait remarquer qu'on l'admet de façon plus cachée graphiquement dès le début du chapitre lorsque l'on fait tendre sur la courbe d'une fonction le point M d'abscisse $a+h$ vers le point A d'abscisse a, afin d'introduire la notion de tangente comme limite des sécantes.

Enfin, dans ce chapitre, les cadres graphiques et numériques devront encore être travaillés en étroite relation.

Mise en œuvre

Activités

L'un des pré-requis les plus importants pour ce chapitre est la notion de coefficient directeur. L'activité 1 permet de retravailler cette notion graphiquement et numériquement en liaison avec la proportionnalité des accroissements pour une fonction affine.

On pourra introduire à ce propos la notation Δx, exigible en terminale S et utilisée également en sciences physiques. Les deux approches du nombre dérivé évoquées dans le document d'accompagnement sont proposées dans les activités 2 et 3 :

– l'aspect cinématique dans l'activité 2. Il est complété par une interprétation graphique de la vitesse moyenne débouchant sur la notion de position limite des sécantes, notion illustrée par le fichier du CD-Rom.

Si les élèves ont déjà traité la vitesse instantanée en physique, il faudra faire le point avec eux sur les ressemblances et différences des méthodes employées en mathématiques et en physique.

Dans les deux cas, on considère bien des petits intervalles de temps ; en physique on utilise une différence symétrique de $t-h$ à $t+h$ et on se contente d'un intervalle de temps assez petit correspondant à une petite unité de temps, mesurable, alors qu'en mathématiques on considère une différence « simple » de t à $t+h$ et on peut rendre h aussi proche de 0 que l'on veut. On s'est limité volontairement à $h>0$; il est bon cependant de signaler que l'étude pourrait être menée de même avec $h<0$.

Lors de l'utilisation en classe, les élèves ont demandé spontanément si l'on pouvait trouver la vitesse instantanée en d'autres instants comme $t=1$; cette activité s'est donc trouvée prolongée par les questions des élèves qui ont finalement fait d'eux-mêmes l'activité 5.

– l'aspect graphique avec une activité sur GEOPLAN. En une heure en salle informatique, elle permet d'aboutir à la notion de tangente et à la définition graphique du nombre dérivé.

Travaux Pratiques

Le TP 1 met en œuvre la méthode d'Euler. Il est indispensable pour préparer le travail à faire en terminale S lors de l'introduction de la fonction exponentielle. Le TP 2 permet de compléter la propriété du cours concernant la dérivabilité de la racine carrée. Les TP 3 et 4 réinvestissent dans le cadre numérique la notion d'approximation affine et l'idée de « termes négligeables » devant d'autres.

Activités

1 **1. a.** et **b.** On lit $\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j}$; le coefficient directeur de (AM) est alors $\frac{y}{x}$ si $x \neq 0$.

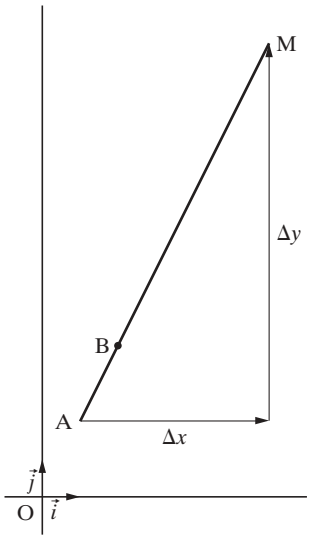
De même pour les coefficients directeurs des autres droites :

Droite	(AB)	(AC)	(CA)	(BE)
Coefficient directeur	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6

Droite	(DA)	(BC)	(AE)	(DE)
Coefficient directeur	$-\frac{2}{5}$	0		$-\frac{6}{5}$

2. a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$.

b.



$\Delta x = 5$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ (coefficient directeur de (AB)) donc $\Delta y = 10$ et $y_M = 10 + y_A = 12$.

3. N(4,35 ; a), $\Delta x = 3{,}35$, $\Delta y = 7{,}7$ et $a = 8{,}7$.

2 **Commentaire**

Cette activité propose une approche cinématique du nombre dérivé, complétée par une interprétation graphique de la vitesse moyenne. On s'est limité volontairement à $h > 0$; il est bon cependant de signaler que l'étude pourrait être menée de même pour $h < 0$.

A. 1. a.

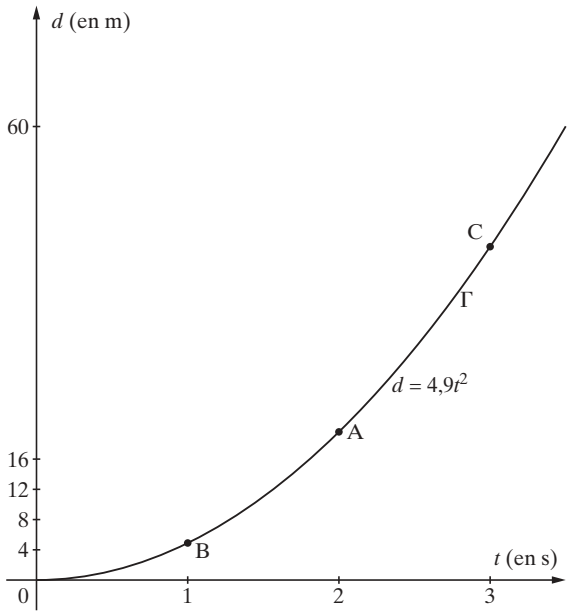
t	0	1	2	3	4
$d(t)$	0	4,9	19,6	44,1	78,4

b. On obtient la vitesse moyenne sur $[t_1 ; t_2]$ par la formule $\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Intervalle	[0 ; 1]	[1 ; 2]	[2 ; 3]	[3 ; 4]
Vitesse moyenne	4,9	14,7	24,5	34,3

La vitesse moyenne n'est pas constante.

2. a.



b. Les coefficients directeurs de (AB) et (AC) représentent les vitesses moyennes sur [1 ; 2] et sur [2 ; 3].

B. 1. a. La vitesse moyenne est :

$$\frac{d(2{,}1) - d(2)}{0{,}1} = 20{,}09 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b. Voir la figure ci-dessus. La vitesse moyenne correspond à la pente de la droite (PA).

2. a. $\frac{d(2+h) - d(2)}{h} = 4{,}9 \times \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$

$= 4{,}9 \times (4 + h)$

$= 4 \times 4{,}9 + 4{,}9h$.

b.

Valeur de h	0,1	0,01	0,001
Intervalle de temps	[2 ; 2,1]	[2 ; 2,01]	[2 ; 2,001]
$4{,}9 \times 4$	19,6	19,6	19,6
$4{,}9h$	0,49	0,049	0,0049
Vitesse moyenne	20,09	19,649	19,6049

c. $4 \times 4{,}9 + 4{,}9h$ tend vers $4 \times 4{,}9 = 19{,}6$ lorsque h tend vers 0.

d. On peut proposer cette valeur comme vitesse instantanée de la bille à $t_0 = 2$ s.

3. Le point M se rapproche du point A. Les droites (AM) tendent vers une droite limite passant par A.

3 Commentaire

Cette activité, utilisant le logiciel Géoplan, aborde la notion de nombre dérivé d'un point de vue graphique. En une heure en salle informatique, elle permet d'aboutir à la notion de tangente et à la définition graphique du nombre dérivé.

A. Voir le fichier Géoplan fourni dans le CD-Rom.

B. 1.

x	0	0,5	0,8	0,9	1,1	1,2	1,5	3
m	1	1,5	1,8	1,9	2,1	2,2	2,5	4

2. Pour $x = 1$, la droite (AM) disparaît et A = M.

3. Le coefficient directeur semble tendre vers 2.

4. a. On doit choisir h proche de 0.

b. Coefficient directeur de (AM) :

$$\frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1} = \frac{h^2+2h}{h}.$$

Donc pour $h \neq 0$, le coefficient directeur de (AM) est égal à $h+2$.

c. $f'(1)$ est donc la valeur limite des nombres $2+h$ lorsque h prend des valeurs très voisines de 0, c'est-à-dire la limite du rapport $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

4 A. 1.

x	1	1,1	0,9	1,01	1,001	0,99
$f(x) = x^2$	1	1,21	0,81	1,020 1	1,002 001	0,980 1
$g(x) = 2x - 1$	1	1,2	+ 0,8	1,02	1,002	0,98
$h(x) = 4x - 3$	1	1,4	0,6	1,04	1,004	0,96
Écart $\lvert f(x) - g(x)\rvert$ entre $f(x)$ et $g(x)$	0	0,01	0,01	0,000 1	0,000 001	0,000 1
Écart $\lvert f(x) - h(x)\rvert$ entre $f(x)$ et $h(x)$	0	0,19	0,21	0,019	0,001 999	0,020 1

Erratum : dans le tableau de la page 66 ; à la dernière colonne, il faut lire 0,99 et non pas 0,099.

2. a. $\lvert f(x) - g(x)\rvert$ devient de plus en plus petit, de même pour $\lvert f(x) - h(x)\rvert$.

b. La fonction g semble être la plus proche de f.

B. Pour l'utilisation de la calculatrice, on pourra se reporter au mode d'emploi du manuel élève, pp. 407-414.

3. Quand x devient « très proche de 1 », les points de P et T sont très proches. Même si, pour $x = 1$, P et D ont un point commun, la courbe s'éloigne rapidement de la droite.

4. La meilleure approximation affine de f au voisinage de 1 est g.
Il n'y en a pas de meilleure. T est la tangente à la courbe de f au point (1 ; 1).

5 1.

$$\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h} = 4{,}9\,\frac{(t_0+h)^2-t_0^2}{h}$$

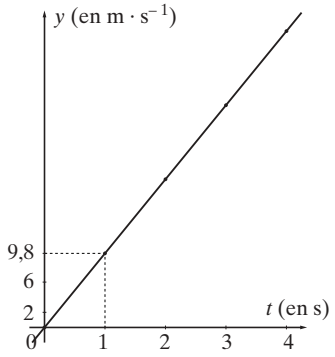
$$= 4{,}9\,\frac{(2ht_0+h^2)}{h}$$

$$= 4{,}9 \times 2t_0 + 4{,}9h$$

donc $d'(t_0) = 9{,}8t_0$.

t en secondes	0	1	2	3	4
Vitesse instantanée $d'(t)$	0	9,8	19,6	29,4	39,2

2. a.

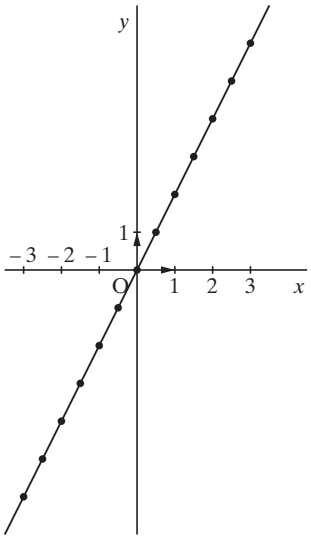


Échelle : 0,45 cm pour 2 m · s^{-1} en ordonnée et 1,8 cm pour 1 s en abscisse.

b. Les points sont situés sur la droite d'équation $y = 9{,}8t$. On peut conjecturer que $d'(t) = 9{,}8t$.

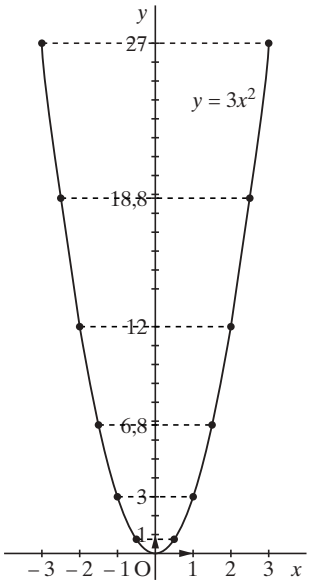
6 **A.** et **B.** Ces parties sont traitées dans le fichier Géoplan du CD-Rom.

C. 1.



Tous les points $(a\,;\,f'(a))$ de la partie **A** semblent situés sur la droite d'équation $y = 2x$.
On peut conjecturer que $f'(a) = 2a$.

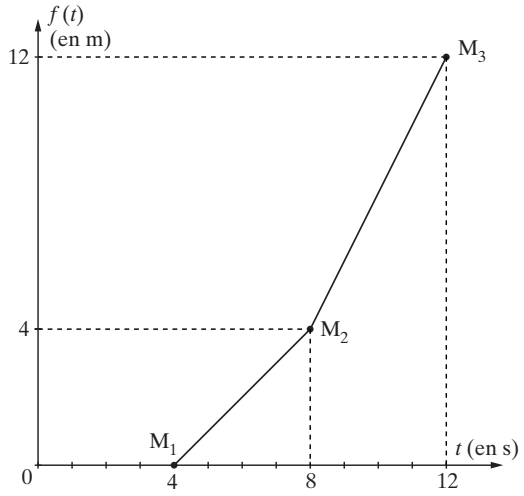
2.



Tous les points $(a\,;\,f'(a))$ obtenus dans la partie **A** sont situés sur la parabole d'équation $y = 3x^2$.
On peut conjecturer que $f'(a) = 3a^2$.

Travaux pratiques

1 **A. 1. a.**



b. $f'(0) = 0$, $f'(4) = 1$, $f'(8) = 2$.

c. $f(4) \simeq 0$;

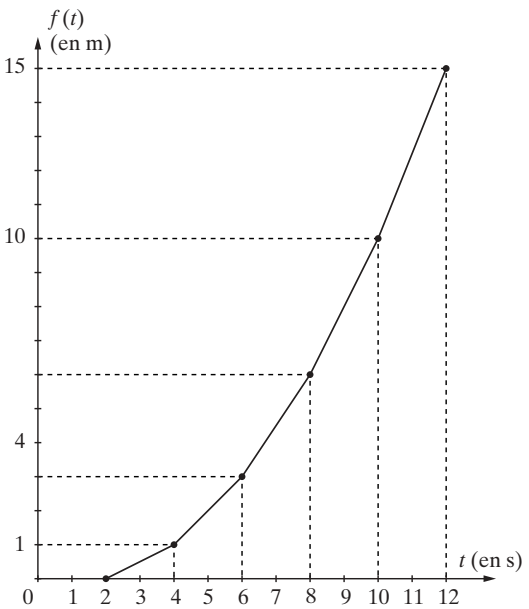
d. Voir figure ci-dessus. $f(8) \approx 4f'(4) + f(4) \approx 4$.

e. $\Delta f \approx f'(8)\Delta f = 2\Delta t = 8$.

2. a. , **b.** et **c.**

Pas $\Delta t = 4$	t	$f(t)$	$f'(t)$	Accroissement de f
	0	0	0	De $t = 0$ à $t = 4$, $\Delta f \approx 0$
	4	0	1	De $t = 4$ à $t = 8$, $\Delta f \approx 4$
	8	4	2	De $t = 8$ à $t = 12$, $\Delta f \approx 8$
	12	12	3	

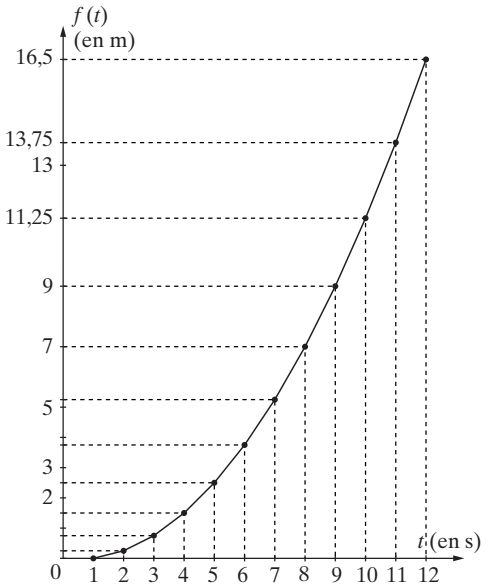
B. 1. a.



b.

Pas $\Delta t = 2$	t	$f(t)$	$f'(t)$	Accroissement de f
	0	0	0	De $t = 0$ à $t = 2$, $\Delta f \approx 0$
	2	0	$\frac{1}{2}$	De $t = 2$ à $t = 4$, $\Delta f \approx 2 \times \frac{1}{2} = 1$
	4	1	1	De $t = 4$ à $t = 6$, $\Delta f \approx 2$
	6	3	$\frac{3}{2}$	

2. a.



b.

Pas $\Delta t = 1$	t	$f(t)$	$f'(t)$	Accroissement de f
	0	0	0	De $t = 0$ à $t = 1$, $\Delta f \approx 0$
	1	0	$\frac{1}{4}$	De $t = 1$ à $t = 2$, $\Delta f \approx \frac{1}{4}$
	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	De $t = 2$ à $t = 3$, $\Delta f \approx \frac{1}{2}$
	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	

C. 1. et **2.** Les fichiers sont disponibles sur le CD-Rom.

2 **1.** • f est dérivable en a si et seulement si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ quand h tend vers 0.
• f n'est pas dérivable en a si et seulement si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ne tend pas vers un réel ℓ quand h tend vers 0.

2. a. $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ pour $h > 0$.

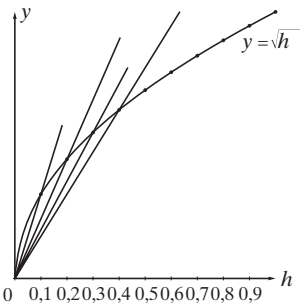
b.

h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-16}
$\dfrac{1}{\sqrt{h}}$	3,162	10	31,623	1 000	10^4	10^8

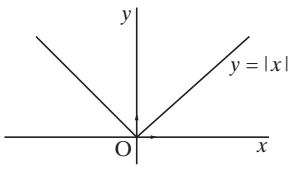
c. $\dfrac{1}{\sqrt{h}} > 10^4$ si $h < 10^{-8}$; $\dfrac{1}{\sqrt{h}} > 10^6$ si $h < 10^{-12}$; $\dfrac{1}{\sqrt{h}} > 10^{50}$ si $h < 10^{-100}$.

d. $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient « grand » lorsque h devient « petit ». $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ ne tend donc pas vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0. On en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

e. Le coefficient directeur $\dfrac{\sqrt{h}}{1} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ des droites (OM) devient très grand, quand l'abscisse de M tend vers 0 ; les droites tendent vers une droite limite verticale.



3. a.



b. Il n'y a pas de tangente en O.

c. $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|-0}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.

Si $h > 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$ et

si $h < 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$.

d.

• Quand h tend vers 0 en restant strictement positif, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ tend vers 1.

• Quand h tend vers 0 en restant strictement négatif, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ tend vers – 1.

• $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ n'admet pas de limite lorsque h tend vers 0.

Pour aller plus loin

• Le nombre dérivé à droite est ici 1.

• Le nombre dérivé à gauche, qui représente la limite de $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ quand h tend vers 0 en restant négatif, est ici – 1.

3 **1.** $\dfrac{1}{1-0{,}02}$ ne se calcule pas facilement de tête, mais 1 + 0,02 si !

$\dfrac{1}{1-0{,}02} \approx 1{,}0204$ donc $\dfrac{1}{1-0{,}02} \approx 1{,}02$.

2. a. $f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) \approx 1 - \dfrac{1}{1^2}(x-1) \approx 2 - x$

car $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

b. $\dfrac{1}{1+h} \approx 2 - (1+h) \approx 1 - h$; $\dfrac{1}{1{,}01} \approx 1 - 0{,}01 \approx 0{,}99$.

3. a. $\dfrac{1}{1+h} - (1-h) = \dfrac{1-(1-h^2)}{1+h} = \dfrac{h^2}{1+h}$.

Si $h \in [-0{,}5\ ;\ 0{,}5]$, $1 + h \in [0{,}5\ ;\ 1{,}5]$

donc $\dfrac{1}{1+h} \in \left[0\ ;\ \dfrac{1}{0{,}5}\right] = [0\ ;\ 2]$

donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+h} - (1-h) \leqslant 2h^2$.

b. $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$ à 10^{-2} près si $2h^2 \leqslant 10^{-2}$, c'est-à-dire $|h| \leqslant 0{,}07$.

4 **A. b.**

p	0,01	0,1	0,02	0,2	0,3	0,03
p^2	0,000 1	0,01	0,000 4	0,04	0,09	0,000 9

p	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
p^2	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1

Plus p est proche de 0, plus on peut négliger p^2 devant p.

c. $4^2 < 20 < 5^2$ donc x est compris entre 4 et 5 car la fonction racine est croissante.

On pose $x = 4 + p$ où $p \in\ ]0\ ;\ 1[$,

$x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$ (*).

On néglige p^2 devant p. (*) s'écrit alors $16 + 8p = 20$,

donc $p = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4 + p = 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$.

d. Si $f(x) = x^2$, au voisinage de 4,

$f(x) \approx f(4) + f'(4)(x-4) = 16 + 8(x-4) = 16 + 8p$.

B. Si $x = \dfrac{9}{2} + p$, $\left(\dfrac{9}{2} + p\right)^2 \approx \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + 2 \times \dfrac{9}{2}\, p = \dfrac{18}{4} + 9p$.

C. • À la façon d'Euler, si $x = 4 + \dfrac{17}{36} + p$,

$$x^2 = \left(4 + \frac{17}{36}\right)^2 + 2\left(4 + \frac{17}{36}\right)p + p^2$$

$$\approx \left(4 + \frac{17}{36}\right)^2 + \left(8 + \frac{17}{18}\right)p.$$

Donc si $x^2 = 20$,

$$p = \frac{18}{161}\left(20 - \left(\frac{161}{36}\right)^2\right) = \frac{-18}{36^2 \times 161} = -\frac{1}{11\ 592}$$

donc $x \approx 4 + \dfrac{17}{36} - \dfrac{1}{11\ 592} = \dfrac{51\ 841}{11\ 592} \approx 4{,}472\ 135\ 956$.

• À la calculatrice, $\sqrt{20} \approx 4{,}472\ 135\ 955$. Le nombre de chiffres après la virgule utilisés par la calculatrice peut être réglé sur les machines.

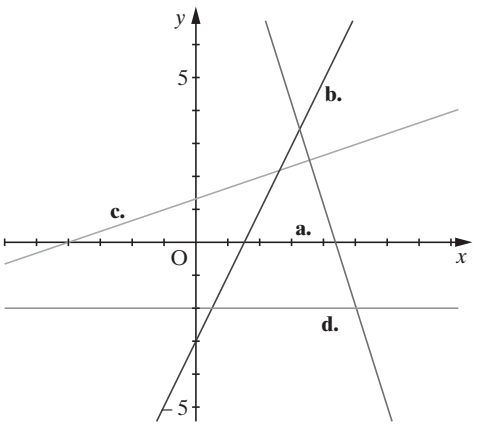
Exercices

ENTRAÎNEMENT

1

Droite	$\mathscr{D}_1$	$\mathscr{D}_2$	$\mathscr{D}_3$	$\mathscr{D}_4$	$\mathscr{D}_5$	$\mathscr{D}_6$
Coefficient directeur	2	-1	0	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$

2



3 On utilise la formule $\Delta y = 4\Delta x$, ou encore ici $y - 1 = 4(x - 3)$.
a. P(5 ; 9) ; **b.** Q(3,7 ; 3,8) ; **c.** R(2,6 ; −0,6).

4 **1.** $f(5) = 25$; $f(5 + h) = 25 + 10h + h^2$.
2. $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = 10 + h$.
3. $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$ tend vers 10 lorsque h tend vers 0 ; donc $f'(5) = 10$.

5 **1.** et **3.** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{2(a+h) - 2a}{h} = 2$ donc $f'(a) = 2$.
On en déduit que $f'(1) = f'(3) = f'(-6) = 2$.
2. On peut conjecturer que f' est une fonction constante.

6 $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{k - k}{h} = 0$ donc $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0, donc f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 0$.

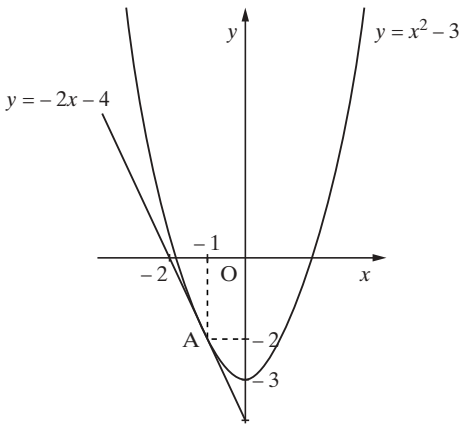
7 **a.** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a + h - a}{h} = 1$ donc $f'(a) = 1$.
b. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$.
$2a + h$ a pour limite $2a$ lorsque h tend vers 0, donc $f'(a) = 2a$.

8 **1.** En développant $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$, on obtient après simplification $x^3 - y^3$.

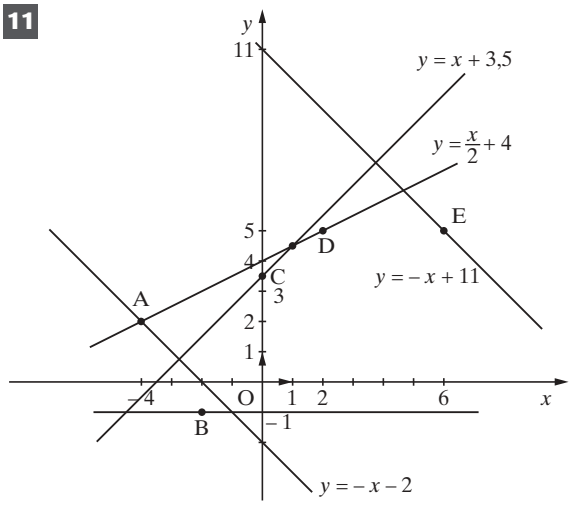
2. a. $(2 + h)^3 - 8 = (2 + h)^3 - 2^3$
$= h((2 + h)^2 + 2(2 + h) + 2^2)$
$= h(12 + 6h + h^2)$.
b. $\dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = 12 + 6h + h^2$ a pour limite 12 lorsque h tend vers 0, donc $f'(2) = 12$.
c. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \dfrac{h(3a^2 + 3ah + h^2)}{h}$
$= 3a^2 + 3ah + h^2$.
$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a pour limite $3a^2$ lorsque h tend vers 0 donc $f'(a) = 3a^2$.

9 **1. a.** $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.
b. $f'(3) = 3$.
2. $f'(-5) = 4$; $f'(-3) = 0$; $f'(0) = -1$.

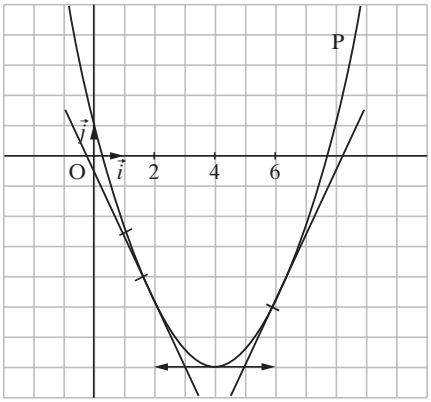
10 **1.** $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{-2h + h^2}{h} = -2 + h$ a pour limite -2 lorsque h tend vers 0 donc $f'(-1) = -2$.
2.



11

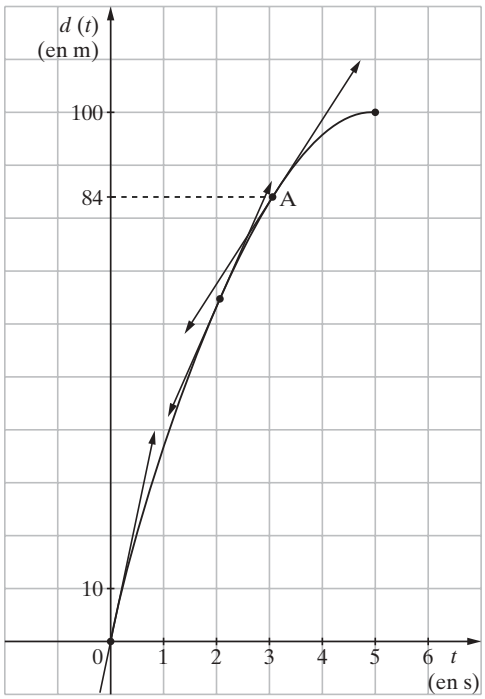


12



$f'(2) = -2$; $f'(4) = 0$; $f'(6) = 2$.

13



$v(0) = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v(2) = 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
En A, la tangente à la courbe a pour coefficient directeur $16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

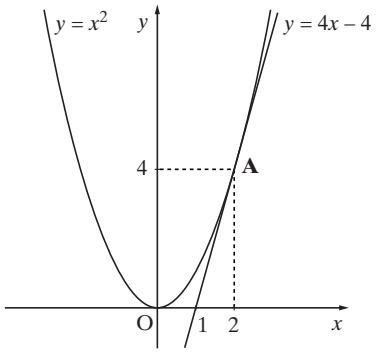
14 **a.** Non dérivable en 3 ; **b.** dérivable en 3.

15 **1.** A a pour ordonnée 5,84.
2. , **3. a.** et **b.** Utilisation de la calculatrice. Vous pouvez revoir son mode d'emploi pp. 407-412.
a. On peut proposer $f'(3{,}2) = 4{,}4$.

16 Même principe qu'au n° **15**.
$g(1) = 0$, on peut proposer $g'(1) = 2$.

17 – Le coefficient directeur est positif ; on élimine **b**.
– L'ordonnée à l'origine est négative ; on élimine **a**.
En traçant avec la calculatrice la courbe C et les deux droites **c** et **d**, on trouve que la tangente au point d'abscisse 3 est la droite **c**.

18 **1.** T_A a pour équation $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, c'est-à-dire $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.
2.



19 **1.** T a pour équation $y - f(4) = f'(4)(x - 4)$, c'est-à-dire $y = 2x - 5$.
2. $f(x) \approx 2x - 5$.

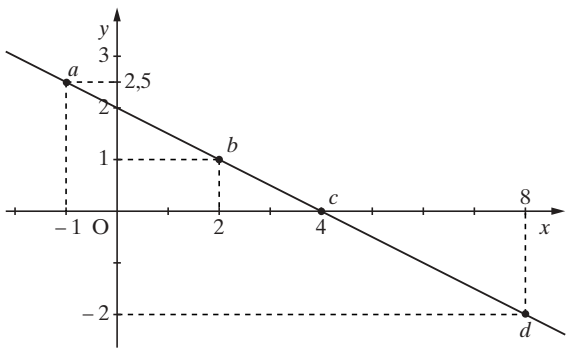
20 $f(3 + h) \approx f(3) + f'(3)h$ donne en prenant $h = 0{,}05$, $f(3{,}05) \approx 1{,}3$.

21 $g(2 + h) \approx g(2) + g'(2)h$ donne en prenant $h = -0{,}02$, $g(1{,}98) \approx -1{,}02$.

22

x	-5		-3		0		1		3
$f'(x)$	-4	↗	0	↘	-1	↘	0	↗	3
$f(x)$	-4	↗	3	↘	-2	↘	$\frac{5}{2}$	↗	1

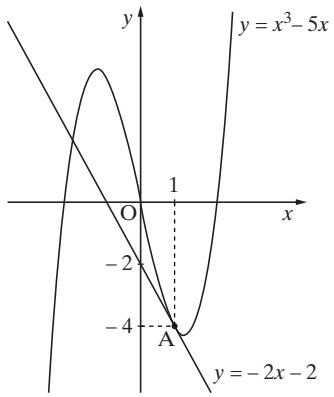
23 **1.** $f'(-1) = \frac{5}{2}$; $f'(2) = 1$; $f'(4) = 0$; $f'(8) = -2$.
2.



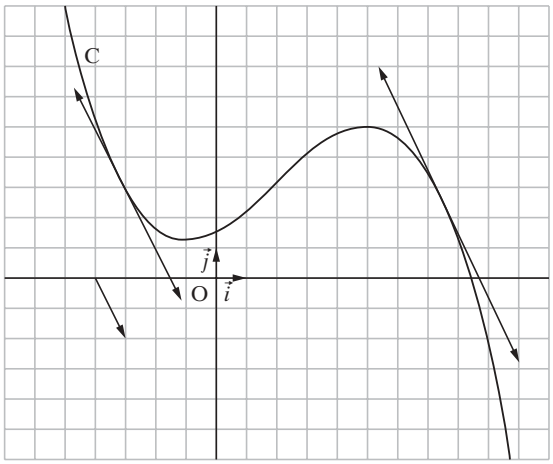
Les quatre points étant sur la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$; on peut conjecturer que $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

24 **1.** $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ donne ici $y = -2x$.

2.



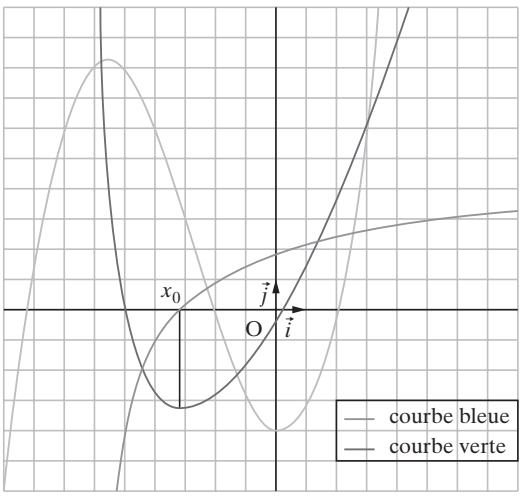
25 **a.**



$f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 5$.

b. $f'(x) = -2$ pour deux valeurs.

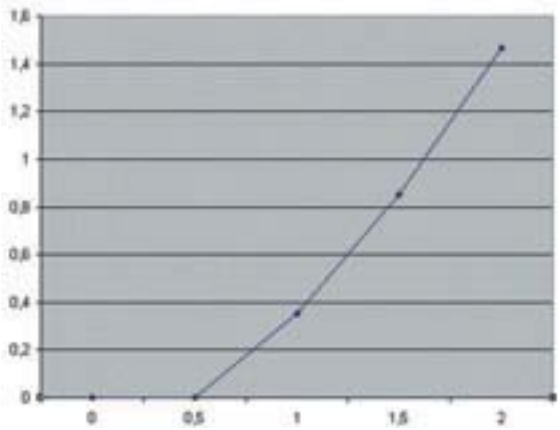
26



La courbe bleue représente $y = f'(x)$ car sur $]-\infty\,;\,x_0]$ les tangentes à C ont un coefficient directeur négatif, donc $f'(x) < 0$ ce qui élimine la courbe verte.

27 Avec un pas de 0,5 :

	1	2
1	0	0
2	0,5	0
3	1	0,35355339
4	1,5	0,85355339
5	2	1,46592583



28 On retrouve une sinusoïde.

29 **a.** $f'(-5) = -10$; **b.** $f'(2) = 12$;
c. $f'(4) = \frac{1}{4}$; **d.** $f'(3) = -\frac{1}{3}$;
e. $f'(\pi) = -1$; **f.** $f'(-1) = -4$.

30 **a.** $y = 4x - 4$; **b.** $y = -6x - 9$;
c. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$; **d.** $y = \frac{\pi}{2} - x$.

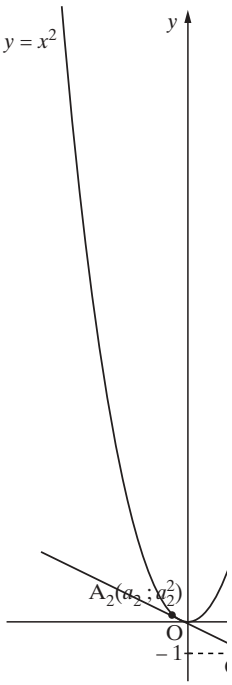
31 Si on pose $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$.
• L'équation $f'(x) = 6$ admet pour racines $+\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$; il y a donc deux points de la courbe où les tangentes ont pour coefficient directeur 6.
• L'équation $f'(x) = -1$ n'ayant pas de solution, aucune tangente à la courbe n'a pour coefficient directeur -1.

32 **1.** $\sqrt{(4+h)} \approx 2 + \frac{1}{4}h$ car si $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(4) = \frac{1}{4}$.

2. $\sqrt{4{,}06} \approx 2{,}015$. La calculatrice donne pour valeur approchée de $\sqrt{4{,}06}$: 2,014 9.

33 **1.** $f(x) \approx f(1) + 3(x-1) = 3x - 2$.
2. $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$.
3. a. $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$,
donc $(1+h)^3 - 1 - 3h = 3h^2 + h^3$.
b. $0 \leqslant h \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 3 + h \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant (3+h)h^2 \leqslant 4h^2$
$\Rightarrow 0 \leqslant (1+h)^3 - 1 - 3h \leqslant 4h^2$.
4. $(1{,}01)^3 \approx 1{,}03$ à 4×10^{-4} près (on choisit $h = 10^{-2}$).

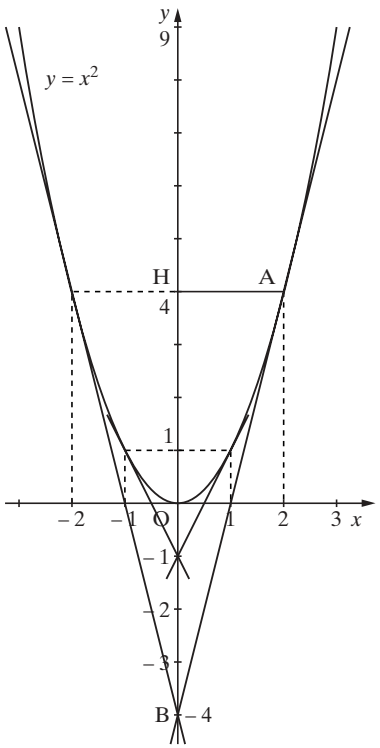
34 **1.** et **2.**



3. a. $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$.

b. Une tangente à P passera par le point Q si et seulement si $-1 = 2a \times 2 - a^2$, c'est-à-dire $a^2 - 4a - 1 = 0$.
Comme l'équation $a^2 - 4a - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 20$, l'équation admet deux racines distinctes a_1 et a_2 : il y aura donc deux tangentes à P passant par Q ; celle passant par $A_1(a_1 ; a_1^2)$ et celle passant par $A_2(a_2 ; a_2^2)$.

35 **1.**



2. $T_A : y = 2ax - a^2$.

3. Point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0 ; -a^2)$.

4. La tangente en un point $A(a ; a^2)$ de la courbe est donc la droite passant par A et par $B(0 ; -a^2)$.
En appelant H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées, $H(0 ; a^2)$ et B sont symétriques par rapport à O.

36 **a.** $2x$; **b.** $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
c. $3x^2 + 2x$; **d.** $6x^5 + \cos x$.

37 **a.** 4 ; **b.** $10x$; **c.** $3 \sin x$; **d.** $-15x^2$.

38 **a.** $4x + 3$; **b.** 2 ; **c.** -4 ; **d.** $4x - 5$.

39 **a.** -1 ; **b.** $15x^4 - 4x$;
c. $-3x^2 + 2x\sqrt{2} + 4$; **d.** $\frac{1}{\sqrt{x}} + 4$.

40 **a.** $\frac{4}{3}$; **b.** $x + \frac{1}{2}$;
c. $\frac{x}{2} - 2$; **d.** $x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$.

41 **a.** $\frac{1}{4\sqrt{x}}$; **b.** $-\frac{4}{x^2} - 10x$;
c. $3 \cos x + \frac{3}{x^2}$; **d.** $-2 \sin x - \cos x$.

42 **a.** $\sqrt{x} + x\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$;
b. $2x(2x + 4) + x^2(2) = 6x^2 + 8x$;
c. $4(x - 5) + 4x(1) = 8x - 20$;
d. $3x^2(x - \sqrt{x}) + x^3\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$;
e. $3(x^2 - 5) + (3x + 4)2x = 9x^2 + 8x - 15$;
f. $-\frac{1}{x^2}(3 + \sqrt{x}) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

43 **a.** $-\frac{1}{(x-3)^2}$; **b.** $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$;
c. $-\frac{2}{(x+4)^2}$; **d.** $\frac{10x}{(x^2+1)^2}$.

44 **a.** $\frac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$;
b. $2\ \frac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+6x)}{(x+3)^2}$;
c. $\frac{(4x+5)(x^2+1)-(2x^2+5x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+2x+5}{(x^2+1)^2}$;
d. $\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x) - (2\sqrt{x}+3)1}{x^2} = \frac{-\sqrt{x}-3}{x^2}$.

45 **a.** $\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2x+6}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+6}}$;

b. $\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6-2x}}\cdot(-2)=-\frac{1}{\sqrt{6-2x}}$;

c. $18(3x-1)^{17}\cdot 3=54(3x-1)^{17}$;

d. $2\cos 2x$;

e. $-3\sin 3x$;

f. $6(2-5x)^5\cdot(-5)=-30(2-5x)^5$.

46 **a.** $4x-5$;

b. $\frac{2(x-5)-(2x+3)1}{(x-5)^2}=\frac{-13}{(x-5)^2}$;

c. $2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,2=\frac{2}{\sqrt{2x+5}}$;

d. $-\sqrt{x}+(2-x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3}{2}\,\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$;

e. $2\sin x\cos x$;

f. $(-3)\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4-3x}}=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4-3x}}$;

g. $-3\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$; **h.** $-\frac{2x}{(x^2-4)^2}$.

47 **a.** $3(\sin x)^2\cos x$;

b. $\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^2+(2\sqrt{x}+1)2x=5x\sqrt{x}+2x$;

c. $\frac{3\sqrt{x}}{2(x-2)}-\frac{x\sqrt{x}}{(x-2)^2}=\frac{(x-6)\sqrt{x}}{2(x-2)^2}$;

d. $\frac{5}{2\sqrt{5x+5}\,(2x-4)}-\frac{2\sqrt{5x+5}}{(2x-4)^2}=-\frac{5(x+4)}{4(x-2)^2\sqrt{5x+5}}$;

e. $-\frac{16x^3}{(x^4+1)^2}$; **f.** $30(3x-5)^4$;

g. $3\sqrt{4-x}-\frac{3x-4}{2\sqrt{4-x}}=-\frac{28+9x}{2\sqrt{4-x}}$;

h. $\sqrt{2x+1}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}}=\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$.

48 **a.** $\frac{3}{2}\,\sqrt{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{2x-1}{(x+1)^2}=\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{x}(x^2+2x+1)+2}{(x+1)^2}$;

b. $4x\cos(3x)-3(2x^2+4)\sin(3x)$;

c. $-6\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x+x\cos x$.

49 et **50** • $f'(x)=-\sin x$, $f'(0)=0$.

• $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4)=\frac{1}{4}$.

Limites	Approximations affines	Tangentes
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-\cos 0}{h}=0$	$\cos h \underset{0}{\approx} 1$	$y=1$
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}=\frac{1}{4}$	$\sqrt{x}\underset{4}{\approx}1+\frac{1}{4}\,x$	$y=\frac{1}{4}\,x+1$

51 On a $d'(t)=-8(t-5)$.

a. $v(0)=40$ m · s^{-1} ; **b.** $v(2)=-24$ m · s^{-1} ;

c. $d(t)=84$ m $\Leftrightarrow -4(t-5)^2=-16$

$\Leftrightarrow (t-5)^2=4$

$\Leftrightarrow t=2+5=7$ ou $t=-2+5=3$.

Comme $t\in[0\,;5]$, $d(t)=84$ m $\Leftrightarrow t=3$. On a alors $v(3)=d'(3)=16$ m · s^{-1}.

52 **1.** À l'instant t (en minutes), le rayon de la plaque est (en millimètres) $r(t)=50+0{,}1t$ donc l'aire de la plaque est, en mm^2, $a(t)=\pi r(t)^2=\pi(50+0{,}1t)^2$.

2. $a'(t)=2\pi\times 0{,}1t=0{,}2\pi t$,

$r(t)=52$ mm $\Leftrightarrow t=20$ min.

On obtient alors $a'(20)\approx 12{,}6$ mm^2 · min^{-1}.

53 **1.** Le coût marginal à la n-ième unité est $f(n+1)-f(n)$.

D'après la propriété 2 p. 70 du manuel élève,

$f(n+1)-f(n)=\Delta f\approx f'(n)\Delta n=f'(n)(n+1-n)$

$=f'(n)$,

donc $f'(n)$ est bien une valeur approchée du coût marginal à la n-ième unité.

54 **1.** et **2.** $R(q)=q(400-0{,}5q)$

donc $R(100)=35\,000$ €, $R(200)=60\,000$ € et $R(300)=75\,000$ €.

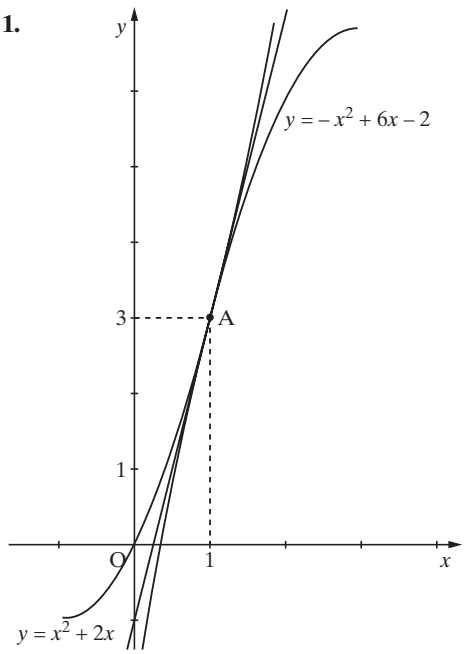
3. **a.** $R(201)-R(200)=60\,199{,}50-60\,000$

$=199{,}50$ €.

b. $R'(q)=400-q$

donc $R(201)-R(200)\approx R'(200)\approx 200$ €.

55 **1.**



2. $A(x\,;\,y) \in C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

3. Posons $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 2$.

• $f'(x) = 2x + 2$ donc $f'(1) = 4$.

• $g'(x) = -2x + 6$ donc $g'(1) = 4$.

Les tangentes en A aux courbes C_1 et C_2 ont même coefficient directeur ; elles sont donc confondues.

56 **1.** T : $y = x - 2$.

2. En développant $(x-1)(x^2 + x - 2)$, on trouve après simplification $x^3 - 3x + 2$.

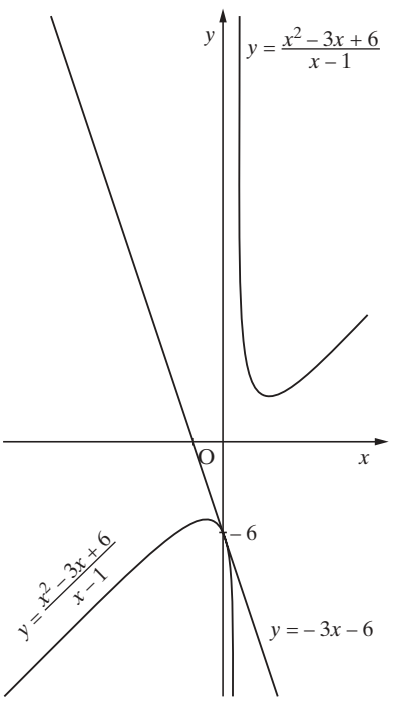
3. $f(x) - (x-2) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$

$= (x-1)^2(x+2)$.

– Si $x < -2$, $f(x) - (x-2) < 0$, la courbe est en dessous de la tangente T.

– Si $x > -2$, $f(x) - (x-2) > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente T.

57



1. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. $f(0) = -6$ donc $A(0\,;\,-6)$.

3. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x^2 + 3x}{x(x-1)} = \dfrac{x+3}{x-1}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x-1} = -3$, on obtient que $f'(0) = -3$.

T_A a alors pour équation $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, soit $y = -3x - 6$.

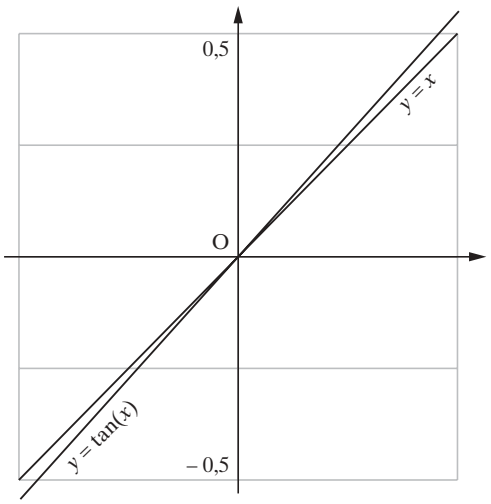
4. $f(x) - (-3x - 6) = \dfrac{4x^2}{x-1}$.

– Si $x < 1$, $f(x) - (-3x - 6) < 0$ donc la courbe est en dessous de T_A.

– Si $1 < x < 0$ ou $x > 0$, $f(x) - (-3x - 6) > 0$ donc la courbe est au-dessus de T_A.

Remarque : $x = 0$ et $x = 1$ correspondent aux abscisses des points d'intersection de T_A et de C.

58 **1. a.**



b. $f(x)$ semble être l'approximation affine de la fonction tangente en O.

2. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Dérivons tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de deux fonctions dérivables.

$\tan' x = \dfrac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x}$

On en déduit que $\tan' 0 = 1$.

Une équation de la tangente à la courbe $y = \tan x$ en O est alors $y - \tan 0 = 1(x - 0)$ soit $y = x$.

La fonction f représente l'approximation affine de tan en 0.

3. Le remplacement de $\tan \theta$ par θ est justifiable en utilisant l'approximation affine :

$\tan \theta \approx \tan 0 + \tan' 0(\theta - 0)$, soit $\tan \theta \approx \theta$.

59 Posons $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

« $y = f(x)$ passe par $A(3\,;\,2)$ » signifie $f(3) = 2$.

« La courbe admet en A une tangente horizontale » signifie $f'(3) = 0$.

« La courbe admet en $B(2\,;\,f(2))$ une tangente parallèle à la droite $y = 3x + 2$ » signifie $f'(2) = 3$.

On obtient donc le système $\begin{cases} 3a + b + \dfrac{1}{2}c = 2 \\ a - \dfrac{c}{4} = 0 \\ a - c = 3. \end{cases}$

Ce qui est équivalent à $\begin{cases} c = 4a \\ -3a = 3 \\ b = 2 - 3a - \dfrac{1}{2}c \end{cases}$

donc $a = -1$, $b = 7$ et $c = -4$.

60 Posons $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$.
$f(1) = 0$, $g(1) = 0$ donc P et P′ passent par le point A(1 ; 0).
• $f'(x) = 4x - 3$ donc $f'(1) = 1$;
• $g'(x) = 2x - 3$ donc $g'(1) = -1$.
La tangente T en A à P a pour coefficient directeur 1 ; donc le point B(2 ; 1) est aussi sur la tangente T.
La tangente T′ en A à P′ a pour coefficient directeur -1 ; donc le point C(2 ; -1) est sur T′.
$AB^2 = 2$, $AC^2 = 2$ et $BC^2 = 4$.
Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ABC est un triangle rectangle en A. Par suite, T et T′ sont orthogonales.

Pour se tester

61 Vrai.

62 Faux, $f'(0) = 2$.

63 Vrai.

64 Faux, $f(-2) = -2$.

65 Vrai.

66 Vrai.

67 Réponse c.

68 Vrai.

69 Vrai.

70 Vrai.

71 Vrai.

72 Vrai.

73 Vrai.

74 Vrai.

75 Faux.

76 Vrai.

77 Vrai, pour $x = 0$ et $x = \dfrac{4}{3}$.

APPROFONDISSEMENT

78 **1.** On peut choisir $f = \tan$ et $a = 0$.

2. En dérivant $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on obtient $\tan'(x) = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$, donc $\tan'(0) = 1$.

3. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tan h}{h} = \tan'(0) = 1$.

79 **1.** $E = m_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right)c^2 = m_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)c^2$, en posant $x = \dfrac{v^2}{c^2}$.

2. $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ où $u(x) = \sqrt{1-x}$ et $u'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$
donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}\,(1-x)}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
On en déduit l'approximation affine de f en 0 : $f(x) \approx 0 + \dfrac{1}{2}(x - 0) \approx \dfrac{1}{2}x$.

3. $E \approx m_0 \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}c^2 \approx \dfrac{1}{2}m_0v^2$. Cette relation $E = \dfrac{1}{2}m_0v^2$ est l'expression de l'énergie cinétique en mécanique classique vue en classe de première S.

80 **1.** $y - \dfrac{a}{x_0} = -\dfrac{a}{x_0^2}(x - x_0)$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{ax}{x_0^2} + \dfrac{2a}{x_0}$.

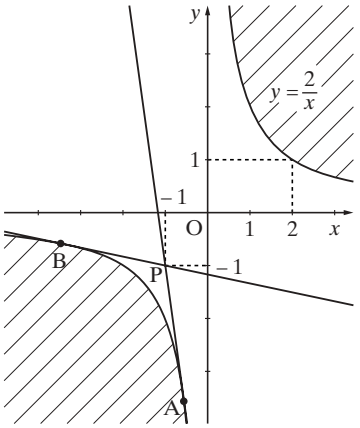
2. a. $\beta = -\dfrac{a\alpha}{x_0^2} + \dfrac{2a}{x_0}$ c'est-à-dire $\beta x_0^2 - 2ax_0 + a\alpha = 0$, l'inconnue étant x_0 et l'équation est à résoudre dans $\mathbb{R}^*$ car $x_0 \neq 0$.

b. Le discriminant est $\Delta = 4a^2 - 4a\alpha\beta = 4a(a - \alpha\beta)$, $a > 0$.
– Si $a < \alpha\beta$ ($\Leftrightarrow \Delta < 0$), il n'y a donc pas de tangente issue de P à (H_a).
– Si $a = \alpha\beta$ ($\Leftrightarrow \Delta = 0$), il y a une seule solution $x_0 = \dfrac{2a}{2\beta} = \dfrac{a}{\beta} = \alpha$.
– Si $\alpha\beta < a$ ($\Leftrightarrow \Delta > 0$), il y a deux valeurs distinctes de x_0 solutions, donc deux tangentes à H_a issues de P.

c. $a = \alpha\beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{a}{\alpha} \Leftrightarrow$ P est sur H_a.
Dans le cas où $\alpha\beta < a$:
• $\alpha > 0$, $\alpha\beta < a \Leftrightarrow \beta < \dfrac{a}{\alpha} \Leftrightarrow$ P est en dessous de H_a et dans le demi-plan de frontière (Oy) situé à droite de (Oy) ;
• $\alpha < 0$, $\alpha\beta < a \Leftrightarrow \beta > \dfrac{a}{\alpha} \Leftrightarrow$ P est au-dessus de H_a et dans le demi-plan de frontière (Oy) situé à gauche de (Oy) ;
• $\alpha = 0$, P est sur (Oy) et il y a deux tangentes issues de P à H_a.

Remarque : ceci est aussi vrai pour tout point P de (Ox).

Conclusion :
• L'ensemble des points P d'où on peut mener une seule tangente à H_a est H_a.
• L'ensemble des points P d'où on peut mener deux tangentes distinctes à H_a est la partie du plan comprise entre les deux branches d'hyperbole (partie non hachurée) sans l'hyperbole.



Région du plan où il n'y a pas de tangente à H_a issue de P.

81 On cherche f sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On se ramène alors à la résolution d'un système 3 équations - 3 inconnues.

a. $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 2a+b=3 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$ $f(x) = 2x^2 - x + 1$;

b. $\begin{cases} a+b+c=4 \\ 2a+b=8 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=6 \\ c=-3 \end{cases}$ $f(x) = x^2 + 6x - 3$;

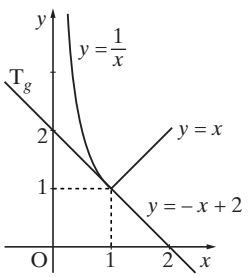
c. $\begin{cases} 4a+b=3 \\ a-b+c=3 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$ $f(x) = x^2 - x + 1$;

d. $\begin{cases} a-b+c=3 \\ 2a+b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=2 \\ c=\frac{11}{2} \end{cases}$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{11}{2}$.

82 **1.** Format de la couverture : 1,458 ; format d'une feuille A4 : 1,414.

2. a. Si $0 < x \leqslant 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$; si $x > 1$, $f(x) = x$.

b.



3. a. f n'est pas dérivable en 1, elle va admettre une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b. Sur [1 ; 2], $f(x) = x = d(x)$; donc d est dérivable sur [1 ; 2] et $\forall x \in [1 ; 2]$, $d'(x) = 1$ donc $d'(1) = 1$.
Une équation de T_d est $y - 1 = 1(x - 1)$, ou encore $y = x + 1$.

c. Sur [0,3 ; 1], $g(x) = f(x) = \frac{1}{x}$; donc g est dérivable sur [0,3 ; 1] et $\forall x \in [0,3 ; 1]$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $g'(1) = -1$. Une équation de T_g est : $y - 1 = -1(x - 1)$, ou encore $y = -x + 1$.

d. Les droites T_g et T_d ne coïncidant pas, f n'est pas dérivable en 1.
On dira néanmoins que f est dérivable à droite en 1 de dérivée $f_d'(1) = 1$ et à gauche en 1 de dérivée $f_g'(1) = -1$.

83 **1.** On suppose que f est dérivable en a.

a. $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} + \frac{f(a)-f(a-h)}{a-(a-h)}\right]$
a pour limite quand h tend vers 0 :
$\frac{1}{2}[f'(a) + f'(a)] = f'(a)$.

b. Le rapport précédent correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe $y = f(x)$ d'abscisses $a + h$ et $a - h$.

c. On calcule les vitesses moyennes entre les instants $t - h$ et t et entre les instants t et $t + h$ pour h petit et on fait la moyenne de ces deux vitesses.

2. Si $f(x) = x^2$, $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{4ha}{2h} = 2a$ a pour limite $2a$ lorsque h tend vers 0.
On retrouve $f'(a) = 2a$.

3. a. f n'est pas dérivable en 0, voir TP **2**.

b. $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{|h|-|-h|}{2h} = \frac{|h|-|h|}{2h} = 0$ si $h \neq 0$
donc $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

c. On en déduit que le rapport $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ peut admettre une limite finie lorsque h tend vers 0 sans que la fonction f soit dérivable en a.

84 **1. a.** $P'(x) = 2ax + b$; **b.** $P''(x) = 2a$;
c. $P(0) = c$ $P'(0) = b$ et $P''(0) = 2a$.

2. En reprenant les notations précédentes, le système
$\begin{cases} P(\alpha) = c + b\alpha + a\alpha^2 \\ P'(\alpha) = 2a\alpha + b \\ P''(\alpha) = 2a \end{cases}$ nous donne $a = \frac{1}{2}P''(\alpha)$,

$b = P'(\alpha) - \alpha P''(\alpha)$ et $c = P(\alpha) - \alpha P'(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}P''(\alpha)$.

Donc $P(x) = \frac{1}{2}P''(\alpha)(x-\alpha)^2 + P'(\alpha)(x-\alpha) + P(\alpha)$.

85 **1.** Coût moyen pour n voyageurs : $\frac{4\ 000}{n} = c(n)$.

Coût marginal du n-ième voyageur :

$$c(n+1) - c(n) = -\frac{4\ 000}{n(n+1)} \approx -\frac{4\ 000}{n^2}.$$

2. – Coût pour 54 voyageurs par voyageur :

$$c(54) = \frac{4\ 000}{54} = \frac{2\ 000}{27}.$$

– Coût pour 55 voyageurs par voyageur :

$$c(55) = \frac{2 \times 3\ 000}{55} = \frac{6\ 000}{55} = \frac{1\ 200}{11}.$$

– Coût marginal du 55e voyageur :

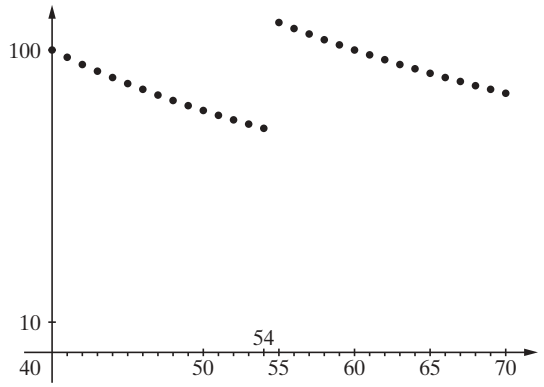
$$c(55) - c(54) = \frac{10\ 400}{297} \approx 35\ €.$$

3. Si $40 \leqslant n \leqslant 54$, $f(n) = \frac{4\ 000}{n}$; si $55 \leqslant n \leqslant 70$, $f(n) = \frac{6\ 000}{n}$.

Si $40 \leqslant n \leqslant 55$, $g(n) = -\frac{4\ 000}{n(n+1)}$; $g(55) = \frac{10\ 400}{297}$; et si $56 \leqslant n \leqslant 69$, $g(n) = \frac{-6\ 000}{n(n+1)}$.

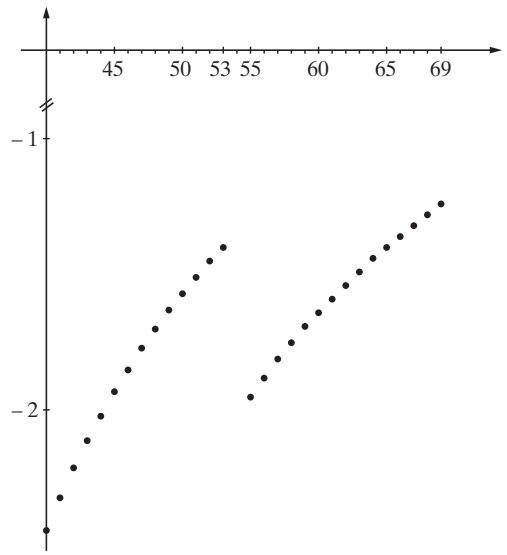
n	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
$f(n) = \frac{4\ 000}{n}$	100	97,6	95,2	93	90,9	88,9	87	85,1	83,3	81,6	80	78,4	76,9	75,5	74,1

n	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
$f(n) = \frac{6\ 000}{n}$	109,1	107,1	105,3	103,4	101,7	100	98,4	96,8	95,2	93,8	92,3	90,9	89,6	88,2	87	85,7



n	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
$g(n)$	– 2,44	– 2,32	– 2,21	– 2,11	– 2,02	– 1,93	– 1,85	– 1,77	– 1,70	– 1,63	– 1,57	– 1,51	– 1,45	– 1,4	– 1,3

n	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
$g(n)$	35	– 1,88	– 1,81	– 1,75	– 1,69	– 1,64	– 1,59	– 1,54	– 1,49	– 1,44	– 1,4	– 1,36	– 1,32	– 1,28	– 1,24



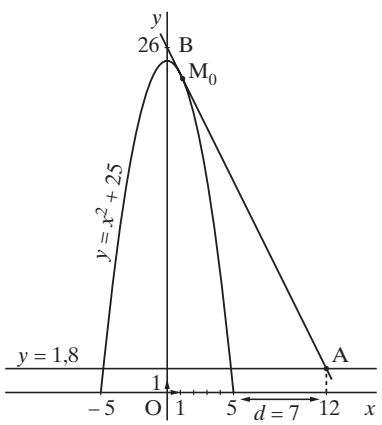
86 **1. a.** $f(x) = u(x)^2 = u(x)u(x)$ donc
$f'(x) = u'(x)u(x) + u(x)u'(x) = 2u(x)u'(x)$.
b. $f(x) = u(x)^3 = u(x)^2u(x)$ donc
$f'(x) = 2u(x)u'(x)u(x) + u(x)^2u'(x) = 3u(x)^2u'(x)$.
c. $f(x) = u(x)^4 = u(x)^3u(x)$ donc
$f'(x) = 3u'(x)u(x)^3 + u(x)^3u'(x) = 4u(x)^3u'(x)$.
2. On peut conjecturer que la dérivée de $x \mapsto u(x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est $x \mapsto nu'(x)u(x)^{n-1}$.
3. a. • $h(x) = u(x)$ donc $h'(x) = u'(x)$.
• $h(x) = g(x)^2$ donc
$h'(x) = 2g(x)g'(x) = 2\sqrt{u(x)}\,g'(x)$.
On en déduit que $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ si $u(x) > 0$.
En appliquant la formule précédente, on obtient $f'(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x+1}}$ en tout point x tel que $3x^2 + x + 1 > 0$. Comme $\Delta = -11 < 0$, la formule ci-dessus est vraie pour tout réel.

Pour chercher

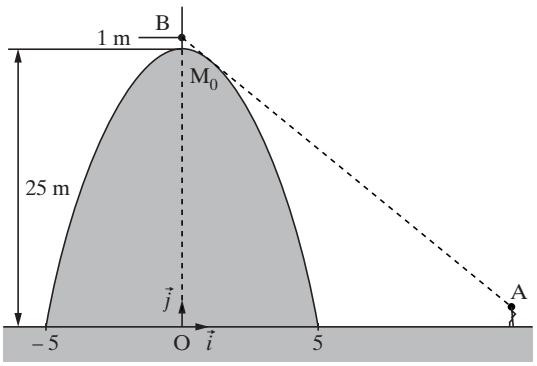
87 La vitesse de rotation du rayon lumineux est constante, donc $\dfrac{\theta}{t} = \dfrac{2\pi}{15}$, soit $\theta = \dfrac{2\pi}{15}\,t$.
Par ailleurs, dans le triangle rectangle IPS, $\tan\theta = \dfrac{d(t)}{60}$
donc $d(t) = 60\tan\theta = 60\tan\left(\dfrac{2\pi}{15}\,t\right)$.
La dérivée de $\theta \mapsto \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ est
$\theta \mapsto \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$
donc $d'(t) = 60(1 + \tan^2\theta)\,\dfrac{2\pi}{15} = 8\pi(1 + \tan^2\theta)$.
Lorsque IS = 120 m, $\tan\theta = 2$ et par suite $d'(t) = 40\pi \approx 126$ m · s^{-1}.

Pour prendre des initiatives

88 **a.** La réponse donnée par un logiciel de géométrie est disponible sur le CD-Rom.



On trace la parabole d'équation $y = -x^2 + 25$ sur $[-5\,;\,5]$ et par le point B(0 ; 26), on mène la tangente à l'arc de parabole situé dans le demi-plan de frontière (Oy), à droite de (Oy). Cette tangente coupe la droite d'équation $y = 1{,}8$ au point A dont l'abscisse par lecture graphique est égale à 12, ce qui donne $d \approx 7$ m.
b. Dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ (cf. schéma), B(0 ; 26) et A(1,80 ; d + 5).



La distance minimale où peut se placer Alexis pour voir le haut du bâton correspond à la position du point A telle que la droite (AB) soit tangente à la parabole en M_0.
Appelons $(x_0\,;\,y_0)$ les coordonnées de M_0. Une équation de la tangente en M_0 est :
$y = y_0 - 2x_0(x - x_0)$ soit encore
$y = -x_0^2 + 25 - 2x_0x + 2x_0^2 = x_0^2 + 25 - 2x_0x$.
Cette tangente passera par B(0 ; 26) si et seulement si $26 = x_0^2 + 25$, soit $x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$.
Dans ce cas de figure, on choisit $x_0 = 1$. La droite (AB) aura donc pour équation $y = 26 - 2x$.
On obtient alors $d = 7{,}1$ m en écrivant que les coordonnées de A vérifient $1{,}8 = 26 - 2(d + 5)$.

89 **1.** En posant $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$, donc $f'(-1) = +1$. Une équation de la tangente en A(– 1 ; 0) est alors $y = x + 1$.
2. $f'(x) = +1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.
Si T est tangente en un autre point à C, ce point ne peut donc être que B(0 ; 0) ou C(1 ; 2).
On remarque que B n'appartient pas à T, alors que C appartient à T. Donc T est aussi tangente en C(1 ; 2) à la courbe C.

PROBLÈMES

90 **1.** En utilisant les résultats obtenus au chapitre 2, on obtient les tableaux de variation suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

2. a. $f(1)=2$, $g(1)=2$ et $h(1)=2$ donc A$(1\,;2)$ est bien un point commun aux trois courbes.

b. $f'(x)=2x$, $g'(x)=x+1$, $h'(x)=-2x+4$.
$f'(1)=g'(1)=h'(1)=2$. On en déduit que les tangentes en A aux courbes C_1, C_2 et C_3 ont le même coefficient directeur 2, donc les trois courbes admettent la même tangente en A.

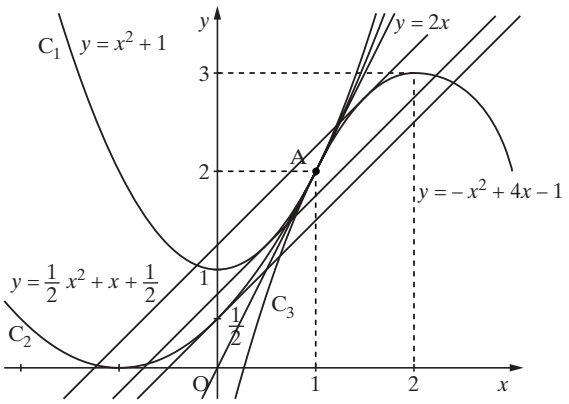
3. Une équation de T est : $y=2+2(x-1)$, soit encore $y=2x$.

• $f(x)-2x=(x-1)^2$, comme $f(x)-2x\geqslant 0$ pour tout x, C_1 est au-dessus de T.

• $g(x)-2x=\frac{1}{2}(x-1)^2$, comme $g(x)-2x\geqslant 0$ pour tout x, C_2 est au-dessus de T.

• $h(x)-2x=-(x-1)^2$, comme $h(x)-2x\leqslant 0$ pour tout x, C_3 est en-dessous de T.

4.

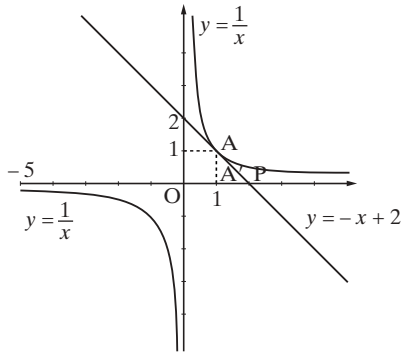


5. • $f'(x)=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. En $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{5}{4}\right)$, C_1 admet une tangente parallèle à $y=x$ d'équation $y=x+\frac{3}{4}$.

• $g'(x)=1 \Leftrightarrow x=0$. En $\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$, C_2 admet une tangente parallèle à $y=x$ d'équation $y=x+\frac{1}{2}$.

• $h'(x)=1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. En $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{11}{4}\right)$, C_3 admet une tangente parallèle à $y=x$ d'équation $y=x+\frac{5}{4}$.
Voir figure ci-dessus pour la suite de la réponse.

91 **1.**



2. a. Une équation de la tangente à H en $A_1(1\,;1)$ est $y-1=\left(-\frac{1}{1^2}\right)(x-1)$ soit $y=-x+2$.

b. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;0)$.

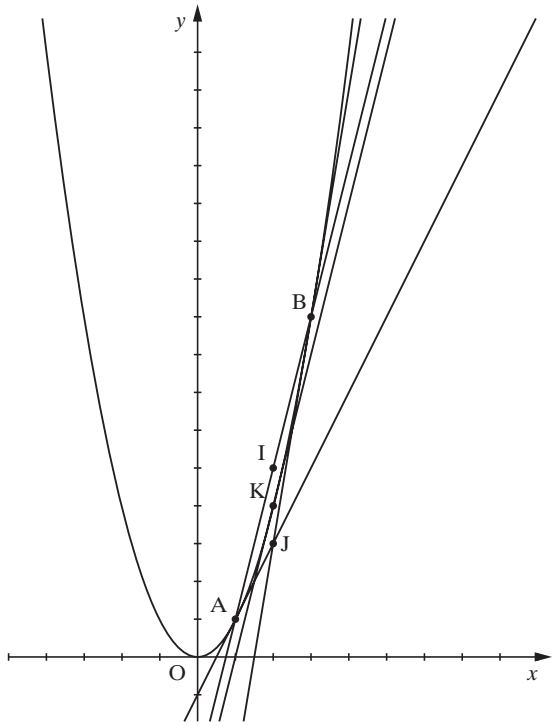
3. a. Une équation de la tangente à H en $A\left(a\,;\frac{1}{a}\right)$ est $y-\frac{1}{a}=\left(-\frac{1}{a^2}\right)(x-a)$, soit $y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$.

b. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en $P(2a\,;0)$.

c. Le projeté orthogonal A′ de A sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(a\,;0)$, P est donc tel que A′ soit le milieu de [OP].

d. Si on cherche à tracer la tangente à H en un point A, on construit le point A′ projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses, puis le point P symétrique de O par rapport à A′. La tangente est alors la droite (AP).

92 **A. 1.**



2. • T_A : $y-1=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-1$.
• T_B : $y-9=(x-3) \Leftrightarrow y=6+x$.

3. a.

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 6x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = 6x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ donc J(2 ; 3).

b. $I\left(\frac{1+3}{2} ; \frac{1+9}{2}\right)$, soit I(2 ; 5).

c. $K\left(\frac{2+2}{2} ; \frac{5+3}{2}\right)$, soit K(2 ; 4).

4. a. $4 = 2^2$ donc K(2 ; 4) appartient à P.

b. La tangente en K à P est parallèle à (AB).

c. T_K et (AB) sont parallèles car $T_K : y = 4x - 4$ et (AB) : $y = 4x - 3$.

B. 1. • $T_A : y - a^2 = 2a(x - a)$ soit encore $y = 2ax - a^2$.

• $T_B : y = 2bx - b^2$.

$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = 2bx - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 0 = 2(a-b)x - (a-b)(a+b) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = ab \end{cases}$ donc $J\left(\frac{a+b}{2} ; ab\right)$,

$I\left(\frac{a+b}{2} ; \frac{a^2+b^2}{2}\right)$, $K\left(\frac{a+b}{2} ; \frac{(a+b)^2}{4}\right)$.

Les coordonnées de K vérifiant $y = x^2$, K appartient à P.

La tangente en K à P a pour équation

$y = \frac{2(a+b)}{2} x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)x - \frac{(a+b)^2}{4}$

(on utilise la relation trouvée en **A2**), la droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$.

On vient ainsi de montrer que la droite (AB) et la tangente en K à P sont parallèles.

2. On construit sur P deux points A et B dont les abscisses x_A et x_B sont telles que $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.

La tangente en M à P est alors la parallèle à (AB) passant par M.

En construisant le milieu I de [AB] et le symétrique J de I par rapport à M, on obtient les tangentes en A et B à P, en traçant les droites (JA) et (JB).

93 **1.** $g(h) = g_0 \frac{1}{\left(\frac{R+h}{R}\right)^2} = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$.

2. $g'(h) = g_0 \frac{-u'(h)}{u(h)^2}$ où $u(h) = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$

et $u'(h) = 2\left(1 + \frac{h}{R}\right)\frac{1}{R}$

donc $g'(h) = -\frac{2g_0}{R} \frac{\left(1 + \frac{h}{R}\right)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^4} = -\frac{2g_0}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^3}$, en particulier, $g'(0) = -\frac{2g_0}{R}$.

L'approximation affine de g en 0 est donc

$g(h) \approx g_0 - \frac{2g_0}{R} h = g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$.

3. On trouve donc l'approximation utilisée par les physiciens.

4. • Valeur exacte :

$9{,}8 \times \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{6\,370}\right)^2} = 9{,}8 \times \left(\frac{3\,185}{3\,187}\right)^2 \approx 9{,}787\,70.$

• Valeur approchée :

$9{,}8\left(1 - 2 \times \frac{4}{6\,370}\right) = 9{,}8 \times \frac{3\,181}{3\,185} \approx 9{,}787\,69.$

L'erreur commise est donc de l'ordre de 10^{-5}.

94 **A. 1.** $T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{1+x}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{1+x}$.

2. a. $T'(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ donc $T'(0) = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$.

L'approximation affine de T en 0 est donc $T(x) \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{\pi}{\sqrt{g}} x$.

b. $T(1{,}02) \approx \frac{\pi}{\sqrt{g}} (2 + 0{,}02) \approx 2{,}03$ s.

B. 1. a. $h(x) - T(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{\pi}{\sqrt{g}} x - \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{1+x}$

$= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left[1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}\right]$

$= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - (1+x)}{\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \sqrt{1+x}}$ en multipliant par l'expression conjuguée

donc

$h(x) - T(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{\frac{x^2}{4}}{1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{2\sqrt{g}} \frac{x^2}{1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}}$.

b. Si $x \geqslant 0$, $1 + x \geqslant 1$; comme la fonction racine est croissante, $\sqrt{1+x} \geqslant \sqrt{1} = 1$, $1 + \frac{x}{2} \geqslant 1$

donc $1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x} \geqslant 2$.

c. En passant à l'inverse, on obtient

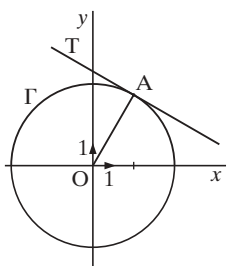
$0 \leqslant \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$

donc $0 \leqslant h(x) - T(x) \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{g}} x^2 \frac{1}{2}$ car $\frac{\pi}{2\sqrt{g}} x^2 \geqslant 0$

d'où $0 \leqslant h(x) - T(x) \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{g}} x^2 \leqslant x^2$.

2. $0 \leqslant h(x) - T(x) \leqslant 10^{-2}$ si $x^2 \leqslant 10^{-2}$, donc si $|x| \leqslant 10^{-1}$.

95



1. a. $AC^2 = (2-0)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2 = 16 = R^2$
donc $A \in C$.
De plus, comme l'ordonnée de A est positive, $A \in \Gamma$.
b. La tangente à Γ en A est une droite passant par A et orthogonale à (OA).
$\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal à T. On en déduit l'équation de T en utilisant le produit scalaire, vu au chapitre 13 :

$$M(x\,;y) \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2) + 2\sqrt{3}(y - 2\sqrt{3}) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

2. a. C ne représente pas une fonction car sur C il y a deux points d'abscisse 1 par exemple.
b. Une équation du cercle C est
$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 16$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 16$.
c. On ne considère que le demi-cercle supérieur, c'est-à-dire les points $(x\,;y)$ vérifiant $x^2 + y^2 = 16$ et $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{16 - x^2}$.
Γ représente donc la fonction $f : x \mapsto \sqrt{16 - x^2}$ définie sur $[-4\,;+4]$.
3. a. $f(x) = \sqrt{(4-x)(4+x)} = \sqrt{4-x} \times \sqrt{4+x}$ car $4 - x \geqslant 0$ et $4 + x \geqslant 0$ si $x \in [-4\,;+4]$.
b. On dérive f comme un produit de fonctions dérivables sur $]-4\,;+4[$.
On obtient alors pour tout $x \in]-4\,;+4[$,

$$f'(x) = \frac{(-1)}{2\sqrt{4-x}}\,\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}\,\frac{1}{2\sqrt{4+x}}$$

soit $f'(x) = \dfrac{(4-x)-(4+x)}{2\sqrt{16-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$.
c. $f'(2) = \dfrac{-2}{\sqrt{12}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Une équation de T′ est alors

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,(x-2) + 2\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

d. On constate que T et T′ sont confondues.

96 **1.** Le volume en litres d'une sphère de rayon R est $\frac{4}{3}\,\pi R^3$ où R est en décimètres. À l'instant t, le volume de l'air contenu par le ballon est égal au volume d'air débité par la pompe en t minutes donc $\frac{4}{3}\,\pi R(t)^3 = 190t$.

2. $t_{\max} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,\dfrac{R_{\max}^3}{190} = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{9^3}{190} \times \pi \approx 16{,}07$ min.

3. a. Si R est dérivable sur $[0\,;t_{\max}]$, $t \mapsto R(t)^2$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et $t \mapsto R(t)^3 = R(t)^2 \times R(t)$ l'est aussi pour les mêmes raisons.
En reprenant le résultat de l'exercice n° **86**, on trouve $f'(t) = 3R(t)^2R'(t)$.
b. $f(t) = \dfrac{190t}{\frac{4}{3}\,\pi} = \dfrac{285t}{2\pi}$, donc $f'(t) = \dfrac{285}{2\pi}$.
c. En identifiant les résultats des questions **a** et **b**, on trouve :
$3R'(t)R(t)^2 = \dfrac{285}{2\pi}$, c'est-à-dire $R'(t) = \dfrac{285}{6\pi R(t)^2}$.
d. $t \mapsto R(t)$ est une fonction croissante positive lorsqu'on gonfle le ballon, donc $t \mapsto R(t)^2$ est croissante.
On en déduit que $t \mapsto \dfrac{285}{6\pi}\,\dfrac{1}{R(t)^2}$ est une fonction décroissante, donc R′ est une fonction décroissante du rayon.

QCM

97 Réponse C.

98 Réponse A : f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, comme quotient de telles fonctions $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)^2}$.
B faux car $f'(x) = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2 = -(x^2-1)^2$
$\Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) = -(x^2-1)^2$,
comme pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$ et $-(x^2-1)^2 \leqslant 0$, l'équation $f'(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R} - \{-1\,;1\}$.
C faux car $f'(1)$ n'existe pas, car $\Delta = -3$ donc $\Delta < 0$ et le coefficient de x^2 est $1 > 0$.

99 Toutes les réponses sont fausses.

100 Réponse C car $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

101 Aucune bonne réponse, $g'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$.

102 Réponse B.